

Zur Schwierigkeit der Riemannsches Vermutung

Methoden, Teilerfolge und strukturelle Hindernisse

Mike Winkler

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Germany

mike.winkler@ruhr-uni-bochum.de

19. April 2026

Zusammenfassung

Die Riemannsches Vermutung gehört zu den bekanntesten offenen Problemen der Mathematik. Ihre Formulierung ist knapp, ihre mathematische Tragweite dagegen außerordentlich groß. Seit mehr als einem Jahrhundert wurden tiefgehende Teilergebnisse, weitreichende Analogien und umfangreiche numerische Bestätigungen gewonnen. Dennoch fehlt bis heute der entscheidende Schritt von Aussagen über viele Nullstellen, asymptotische Häufigkeiten oder endliche Verifikationsbereiche hin zu einer Aussage über jede einzelne nichttriviale Nullstelle. Dieser Artikel möchte einen strukturierenden Überblick geben. Er beschreibt die wichtigsten Methoden, ihre tatsächliche Reichweite und die Gründe dafür, dass sie bislang nicht zu einem Beweis der Riemannsches Vermutung geführt haben.

1 Einleitung

Die Riemannsches Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re s > 1)$$

besitzt eine analytische Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene mit Ausnahme eines einfachen Pols bei $s = 1$ und erfüllt eine Funktionalgleichung. In symmetrischer Form besagt sie, dass die Nullstellen an der Spiegelung $s \leftrightarrow 1 - s$ teilnehmen. Daraus erklärt sich unmittelbar die ausgezeichnete Rolle der Geraden $\Re s = \frac{1}{2}$.

Außerdem besitzt $\zeta(s)$ die sogenannten trivialen Nullstellen bei den negativen geraden ganzen Zahlen. Sie folgen aus der Funktionalgleichung und stehen nicht im Zentrum des Problems. Die *Riemannsches Vermutung* betrifft allein die nichttrivialen Nullstellen im kritischen Streifen

$$0 < \Re s < 1,$$

und behauptet, dass alle diese Nullstellen den Realteil $1/2$ besitzen.

Die besondere Stellung dieser Vermutung beruht auf ihrer engen Verbindung zur Primzahlverteilung. Schon Riemann erkannte, dass die Lage der Nullstellen die Fehlerterme in Formeln für die Anzahl der Primzahlen bis x bestimmt. Bombieri hebt in seinem Millenniumsartikel hervor, dass ein Gegenbeispiel zur Riemannschen Vermutung eine erhebliche Irregularität in der Primzahlverteilung anzeigen würde [1].

Gerade diese Verbindung erklärt den eigentümlichen Rang des Problems. Es handelt sich nicht um eine isolierte Aussage über eine einzelne Funktion, sondern um einen Knotenpunkt, an dem sich Analysis, Arithmetik und spektrale Intuition berühren. Kaum eine andere Vermutung der Zahlentheorie dürfte auf so engem Raum eine vergleichbare Dichte mathematischer Bedeutung versammeln.

Der vorliegende Text verfolgt kein technisches Beweisprogramm. Er will vielmehr die Lage des Problems ordnen. Im Mittelpunkt steht die Frage, weshalb eine Vielzahl starker Methoden bis heute nicht ausreicht, um die Lage jeder einzelnen Nullstelle mit der erforderlichen Strenge festzulegen. Ein kurzer Hinweis sei schon hier eingefügt. In vielen arithmetischen Anwendungen tritt nicht nur die Riemannsche Vermutung selbst auf, sondern ihre Verallgemeinerung auf Dirichlet- und allgemeinere L -Funktionen. Man spricht dann von der Generalisierten Riemannschen Vermutung.

2 Was bereits bewiesen ist

Die Riemannsche Vermutung steht nicht im leeren Raum. Sie ist vielmehr von einer langen Reihe grundlegender Resultate umgeben, die jeweils einen wesentlichen Teil des Gesamtbildes klären. Wer über die Schwierigkeit der Vermutung sprechen will, muss daher zunächst sehen, wie reich die mathematische Umgebung ist, in der sie steht.

Der Primzahlsatz

Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesen 1896 unabhängig voneinander, dass

$$\zeta(1 + it) \neq 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

und leiteten daraus den Primzahlsatz her

$$\pi(x) \sim \text{li}(x).$$

Damit war erstmals eine präzise asymptotische Beschreibung der Primzahlverteilung gewonnen. Für die Riemannsche Vermutung ist dieses Resultat jedoch nur ein erster Schritt. Es schließt Nullstellen auf der Geraden $\Re s = 1$ aus, nicht aber im gesamten Bereich $1/2 < \Re s < 1$ [2, 3].

Der historische Rang dieses Satzes kann kaum überschätzt werden. Zugleich zeigt gerade er, wie weit der Weg zur Riemannschen Vermutung noch ist. Zwischen dem Ausschluss von Nullstellen auf dem Rand des kritischen Streifens und ihrer vollständigen

Bindung an die Mittellinie liegt ein Abstand, der sich nicht durch bloße Verfeinerung der ursprünglichen Methode überbrücken zu lassen scheint. Hier ist der Sprung nicht bloß quantitativ, sondern qualitativ.

Unendlich viele Nullstellen auf der kritischen Geraden

Hardy zeigte 1914, dass unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\Re s = 1/2$ liegen. Damit wurde die kritische Gerade nicht nur als symmetrisch ausgezeichnete Linie sichtbar, sondern auch als Ort einer tatsächlich unendlichen Teilmenge der Nullstellen [1, 3].

Auch dieses Resultat besitzt einen eigentümlichen Doppelcharakter. Es ist einerseits ein großer Fortschritt. Andererseits macht es durch seine Form deutlich, wie hartnäckig der letzte Schritt bleibt. Unendlich viele ist in diesem Zusammenhang eine tiefe Aussage, aber noch weit von einer Aussage über sämtliche Nullstellen entfernt.

Ein positiver Anteil auf der kritischen Geraden

Spätere Arbeiten von Selberg, Levinson und Conrey entwickelten Methoden, mit denen sich zeigen lässt, dass ein positiver Anteil aller Nullstellen auf der kritischen Geraden liegt. Ein wesentlicher moderner Meilenstein ist das Resultat von Bui, Conrey und Young, wonach mehr als 41% der Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen [5]. Pratt, Robles, Zaharescu und Zeindler verbesserten dies auf mehr als 5/12 aller Nullstellen [6].

Diese Aussagen sind tief und technisch anspruchsvoll. Zugleich machen sie mit besonderer Schärfe sichtbar, dass zwischen einem positiven Anteil und der Gesamtheit aller Nullstellen ein erheblicher konzeptioneller Abstand besteht. Die Methoden besitzen große Reichweite. Ihre bisherigen Erfolge zeigen aber auch, dass quantitative Verstärkung und qualitativer Durchbruch nicht dasselbe sind.

Numerische Verifikation

Hinzu kommen umfangreiche numerische Bestätigungen. Platt und Trudgian verifizierten rigoros, dass alle Nullstellen mit

$$0 < \Im \rho \leq 3 \cdot 10^{12}$$

auf der kritischen Geraden liegen [7]. Dies ist ein bemerkenswert starkes Resultat. Es bleibt jedoch prinzipiell auf einen endlichen Bereich beschränkt und kann daher einen allgemeinen Beweis nicht ersetzen.

Gerade die numerische Seite des Problems besitzt einen beinahe paradoxen Reiz. Je weiter die Verifikation reicht, desto überzeugender wirkt das Gesamtbild. Und doch bleibt der logische Abstand zu einer universellen Aussage unangetastet. Die eigentliche Mathematik der Vermutung beginnt genau dort, wo endliche Kontrolle in allgemeine Notwendigkeit übergehen müsste.

3 Warum analoge Probleme manchmal lösbar sind

Besonders aufschlussreich ist der Vergleich mit Zetafunktionen von Kurven über endlichen Körpern. Dort existiert eine zur Riemannschen Vermutung analoge Aussage, und diese ist bewiesen. Der Grund liegt nicht in einer bloßen Vereinfachung des Problems, sondern in der Verfügbarkeit einer starken geometrischen Struktur. Frobenius-Wirkungen, Kohomologie und Positivitätsaussagen greifen dort in einer Weise ineinander, die die Lage der Nullstellen erzwingt [1].

Entscheidend ist dabei, dass die Zetafunktion im Funktionenkörperfall nicht als isolierte analytische Funktion erscheint. Sie ist an ein geometrisches Objekt gebunden. Dadurch wird die Nullstellenfrage in eine Eigenwertfrage natürlicher Operatoren überführt. Gerade diese Art von Struktur hat sich in verwandten Problemen als ausschlaggebend erwiesen.

Die neue Übersichtsarbeit von Alain Connes schärft diesen Gesichtspunkt noch einmal. Sie erinnert an Weil's Bild eines dreifachen Textes, in dem Riemannsche Flächen, algebraische Geometrie über endlichen Körpern und der arithmetische Fall von $\text{Spec } \mathbb{Z}$ einander entsprechen. Die Pointe dieses Bildes liegt darin, dass Grothendiecks Schementheorie einen einheitlichen Rahmen sichtbar macht, in dem in allen drei Fällen reguläre Schemata der Dimension eins auftreten [4].

Hier liegt einer der lehrreichsten Unterschiede zwischen dem klassischen Fall und seinen erfolgreichen Analogien. Im Funktionenkörperfall wird die Nullstellenfrage in einen geometrischen Zusammenhang eingebettet, der Positivität und Spektraltheorie miteinander verknüpft. Der analytische Befund erhält dadurch einen tragenden Untergrund. Im Zahlkörperfall fehlt ein solcher Untergrund bislang.

Der Vergleich macht damit die Schwierigkeit des klassischen Falls besonders deutlich. Für die gewöhnliche Riemannsche Zetafunktion über den ganzen Zahlen kennt man bisher kein allgemein akzeptiertes geometrisches oder kohomologisches Objekt, das dieselbe tragende Rolle übernehmen könnte. Darin liegt wahrscheinlich die tiefste konzeptionelle Hürde des Problems.

4 Die wichtigsten Methoden und ihre Grenzen

Euler-Produkt, analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung

Das Euler-Produkt

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (\Re s > 1)$$

stellt die elementare Verbindung zu den Primzahlen her. Es gilt allerdings nur im Gebiet $\Re s > 1$. Gerade deshalb ist die analytische Fortsetzung unverzichtbar, wenn man über Nullstellen im kritischen Streifen sprechen will. Die analytische Fortsetzung und die Funktionalgleichung zeigen, dass die Nullstellen in einem hochsymmetrischen analytischen Rahmen auftreten [2].

Diese Struktur ist unverzichtbar. Sie bestimmt jedoch noch nicht die Lage der Nullstellen innerhalb des kritischen Streifens. Sie formuliert das Problem in seiner natürlichen Gestalt, löst es aber nicht. Man könnte auch sagen, dass hier die Form des Problems sichtbar wird, nicht aber seine innere Ursache.

Explizite Formel

Die explizite Formel bildet eine der schärfsten Brücken zwischen Primzahlen und Nullstellen. Sie übersetzt Aussagen über die Nullstellen in Aussagen über die Primzahlverteilung und umgekehrt. In dieser Sprache erscheint die Riemannsche Vermutung als Aussage über die Größe des Fehlerterms im Primzahlsatz [1, 3].

Die Stärke dieses Werkzeugs liegt in seiner präzisen Vermittlungsfunktion. Darin liegt aber auch seine Grenze. Die explizite Formel schafft keine zusätzliche Positivität und keine spektrale Struktur. Sie legt offen, was bewiesen werden müsste, sie liefert den Beweis jedoch nicht aus sich heraus.

Dies ist in gewissem Sinn charakteristisch für das gesamte Problem. Man weiß sehr genau, welche Konsequenzen die Lage der Nullstellen hat. Weniger klar ist, durch welchen zwingenden Mechanismus diese Lage selbst erzwungen werden soll.

Nullstellenfreie Gebiete und Dichtesätze

Ein klassischer Zugang besteht darin, Gebiete ohne Nullstellen nachzuweisen oder die Anzahl der Nullstellen rechts von einer Vertikalen $\Re s = \sigma > 1/2$ abzuschätzen. Solche Dichteaussagen sind für viele Anwendungen von großer Bedeutung [3].

Ihre Grenze ist klar. Sie zeigen, dass Nullstellen rechts von $1/2$ selten sein müssen. Die Riemannsche Vermutung verlangt dagegen, dass es keine einzige solche Nullstelle gibt. Der Schritt von Seltenheit zu vollständigem Ausschluss ist mit diesen Methoden bislang nicht gelungen.

An diesem Punkt zeigt sich ein wiederkehrendes Motiv. Die vorhandenen Werkzeuge sind stark genug, um grobe oder mittlere Phänomene zu kontrollieren. Sie reichen jedoch nicht aus, um aus dieser Kontrolle die absolute Starrheit jeder einzelnen Nullstelle zu gewinnen.

Mittelwerte, Mollifiere und Nullstellen auf der kritischen Geraden

Die erfolgreichste klassische Richtung für direkte Fortschritte auf der kritischen Geraden arbeitet mit Mittelwerten von $\zeta(1/2 + it)$ und mit sogenannten Mollifiern, also geeigneten gewählten Dirichlet-Polynomen zur Glättung starker Fluktuationen. In dieser Tradition stehen die Arbeiten von Selberg, Levinson, Conrey und späteren Autoren [2, 3, 5, 6].

Diese Methoden besitzen eine bemerkenswerte Leistungsfähigkeit. Sie beweisen nicht nur die Existenz unendlich vieler Nullstellen auf der kritischen Geraden, sondern liefern sogar quantitative Aussagen über den Anteil solcher Nullstellen. Ihr methodischer

Charakter bleibt jedoch statistisch. Kontrolliert werden große Mengen von Nullstellen, nicht jede einzelne für sich.

Hier liegt zugleich ihre Größe und ihre Grenze. Sie dringen tief in die Feinstruktur der Zetafunktion ein und scheinen doch an einem Punkt stehen zu bleiben, an dem aus viel beinahe alles werden müsste. Eben dieser Schritt ist bislang nicht gelungen.

Pair-Correlation-Statistik und Theorie zufälliger Matrizen

Zu den eindrucksvollsten Entwicklungen gehört die Beobachtung, dass die lokale Statistik der Zeta-Nullstellen enge Ähnlichkeiten mit Eigenwertstatistiken großer zufälliger hermitescher Matrizen aufweist. Ausgehend von Montgomery und gestützt durch die numerischen Daten von Odlyzko gilt diese Analogie heute als eine der stärksten heuristischen Evidenzen für die Riemannsche Vermutung und verwandte Aussagen [2].

Connes weist mit Recht darauf hin, dass dieser Vergleich nur nach einer lokalen Reskalierung sinnvoll wird, weil die Dichte der Nullstellen variiert. Gerade dieser Umstand legt nach seiner Lesart das Fehlen eines echten hochfrequenten oder ultravioletten Modells der Zetafunktion offen. Gemeint ist damit, dass die Nullstellenstatistik zwar im Kleinen erstaunlich präzise modelliert werden kann, dass aber ein intrinsisches mathematisches Objekt, aus dem dieses Verhalten ohne nachträgliche Reskalierung hervorgeht, weiterhin fehlt [4].

Doch auch hier ist die Grenze eindeutig. Statistische Übereinstimmung ersetzt keine mathematische Konstruktion. Die Theorie zufälliger Matrizen beschreibt mit großer Präzision, wie sich Nullstellen verhalten. Sie identifiziert aber nicht das arithmetische Objekt, aus dem dieses Verhalten zwingend folgen würde.

Aufschlussreich ist in diesem Zusammenhang auch der weitere Rahmen der Dirichlet- L -Funktionen. Dort zeigt sich, dass statistische Aussagen über Nullstellen nicht nur heuristischen Wert besitzen, sondern in Verbindung mit zusätzlichen Annahmen tiefgreifende arithmetische Folgen tragen können. Neuere Arbeiten legen nahe, dass geeignete Paar-Korrelationsannahmen zusammen mit der Generalisierten Riemannschen Vermutung zu sehr starken Aussagen über Primzahlen in arithmetischen Progressionen führen würden [8]. Gerade dies ist für die Lage des Problems aufschlussreich. Die Statistik der Nullstellen besitzt offenbar eine erhebliche arithmetische Reichweite. Aber auch hier bleibt der entscheidende Schritt unvollzogen. Selbst starke globale Kontrolle und weitreichende Konsequenzen für Primzahlfragen liefern noch nicht die Struktur, aus der die exakte Lage jeder einzelnen Nullstelle notwendig folgen würde.

Vielleicht zeigt sich hier am deutlichsten die eigentümliche Situation der heutigen Forschung. Die Phänomene deuten mit großer Hartnäckigkeit in eine bestimmte Richtung. Was fehlt, ist nicht Intuition, sondern ein mathematischer Träger dieser Intuition.

Hilbert-Pólya, Spurformeln und spektrale Programme

Die Hilbert-Pólya-Idee besagt in grober Form, dass die imaginären Teile der Nullstellen Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators sein sollten. Wäre ein solcher Operator

in der richtigen Weise konstruiert, dann würde die Lage auf der kritischen Geraden aus der Selbstadjungiertheit folgen [2].

Die Attraktivität dieser Idee ist offenkundig. Sie verwandelt eine arithmetische Nullstellenfrage in ein spektrales Problem. Bis heute kennt man jedoch keinen allgemein akzeptierten Operator mit genau den erforderlichen Eigenschaften. Es gibt partielle Programme, Spurformel-Analysen und tiefe heuristische Modelle. Eine abgeschlossene Theorie liegt bisher aber nicht vor.

Dies ist mehr als eine bloße technische Lücke. Es ist die Abwesenheit jener Struktur, die viele Mathematiker seit langem als das eigentliche Ziel ansehen. Ein solcher Operator wäre nicht nur ein Werkzeug. Er wäre eine Erklärung.

de-Branges-Räume und Positivitätsansätze

Eine weitere Richtung versucht, die Riemannsche Vermutung in Hilberträumen ganzer Funktionen zu verankern und aus Positivitätsstrukturen herzuleiten. Solche Ansätze sind konzeptionell attraktiv, weil sie die Nullstellenlage mit der inneren Struktur eines Funktionenraums verknüpfen [3].

Die für die Riemannsche Vermutung erforderliche Positivität ist jedoch bislang nicht zugänglich. Daher führen diese Ansätze häufig eher zu Umformulierungen oder Charakterisierungen als zu einem unabhängigen Beweisweg.

Auch hier tritt dasselbe Grundmuster hervor. Die Theorie bringt das Problem in eine schönere und strukturell reichere Form. Der entscheidende Zwang, der aus dieser Form einen Beweis machen würde, bleibt aber aus.

Äquivalenzkriterien

Es gibt zahlreiche Kriterien, die zur Riemannschen Vermutung äquivalent sind, etwa vom Typ Nyman-Beurling, Li oder Speiser. Ihre mathematische Bedeutung liegt darin, dass dieselbe Vermutung in unterschiedlichen Sprachen auftritt, etwa als Approximation, als Positivität oder als Aussage über Ableitungen und explizite Folgen [3].

Darin liegt ein echter Erkenntnisgewinn. Ein Äquivalenzkriterium zeigt, dass die Riemannsche Vermutung nicht isoliert steht, sondern in ein Netz tiefer Zusammenhänge eingebettet ist. Gleichzeitig darf die Bedeutung solcher Kriterien nicht missverstanden werden. Die Schwierigkeit des Problems verschwindet durch die Umformulierung nicht. Sie tritt lediglich in anderer Gestalt wieder auf. Eben deshalb ist ein Äquivalenzkriterium noch kein eigenständiger Durchbruch.

Die neuere Arbeit von Connes bestätigt diesen Punkt nachdrücklich. Er verweist auf die große Zahl bekannter Äquivalenzen und warnt gerade deshalb vor ihrem Sog. Die Fülle der Formulierungen ist erkenntnisreich. Sie kann aber leicht den Eindruck erwecken, der Kern des Problems sei bereits in handlicher Gestalt erreicht, obwohl die eigentliche Schwierigkeit nur ihr Gewand gewechselt hat [4].

Vielleicht liegt in dieser Einsicht sogar eine methodische Nüchternheit, die dem Problem angemessen ist. Nicht jede tiefere Formulierung ist bereits eine Lösung. Mitunter

zeigt die Verfeinerung der Sprache vor allem, wie hartnäckig die Sache selbst bleibt.

5 Was derzeit als nächste Fortschrittsstufe realistisch erscheint

Betrachtet man die bisherige Entwicklung, so wirken inkrementelle Fortschritte wahrscheinlicher als ein unmittelbarer Vollbeweis. Realistisch erscheinen vor allem weitere kleine Verbesserungen beim nachgewiesenen Anteil der Nullstellen auf der kritischen Geraden, schärfere explizite nullstellenfreie Gebiete, bessere Nullstellendichte-Sätze und höhere rigorose numerische Verifikationsgrenzen.

Auch die Lindelöfsche Vermutung gehört in diesen Zusammenhang. Sie ist schwächer als die Riemannsche Vermutung, aber stark genug, um eine Reihe wichtiger Abschätzungen zu implizieren. Deshalb erscheint sie als natürliches Zwischenziel, ohne den eigentlichen Kern des Problems bereits aufzulösen.

Jede dieser Richtungen wäre mathematisch bedeutsam. Keine von ihnen scheint jedoch für sich genommen den letzten Schritt zur Riemannschen Vermutung zu erzwingen.

Andererseits gibt es Zwischenresultate, die inhaltlich bereits sehr nahe an die Vermutung heranreichen würden. Dazu gehören etwa ein Nachweis von $N_0(T) \sim N(T)$, also die asymptotische Dominanz der Nullstellen auf der kritischen Geraden, ein Beweis, dass nur endlich viele Nullstellen außerhalb der kritischen Geraden liegen, eine echte Hilbert-Pólya-Konstruktion oder ein geometrisch kohomologisches Modell für $\zeta(s)$ im Zahlkörperfall.

Diese Gegenüberstellung macht sichtbar, dass nicht jede weitere Verbesserung derselben Art einen qualitativen Durchbruch bedeutet. Entscheidend wäre vielmehr ein Strukturgewinn, der das Problem auf eine neue theoretische Ebene hebt. Die Geschichte der bisherigen Fortschritte legt nahe, dass der eigentliche Durchbruch weniger in einer weiteren numerischen Verbesserung als in einer neuen Form mathematischer Erklärbarkeit liegen dürfte.

6 Fazit

Die Riemannsche Vermutung erscheint von außen leicht als einzelnes isoliertes Rätsel. In Wirklichkeit bildet sie einen Knotenpunkt mehrerer großer Theorien, darunter die analytische Zahlentheorie, die Spektraltheorie, die Theorie zufälliger Matrizen und die Theorie expliziter Formeln.

Die bisherige Forschung hat das Problem keineswegs im Dunkeln gelassen. Wir kennen die analytische Struktur von $\zeta(s)$, wir verstehen ihre Verbindung zur Primzahlverteilung, wir verfügen über tiefe Dichtesätze, starke Resultate auf der kritischen Geraden und weitreichende numerische Bestätigungen. Was fehlt, ist nicht Evidenz,

sondern Zwang. Gesucht ist eine Struktur, die jede einzelne Nullstelle dazu zwingt, auf der Geraden $\Re s = 1/2$ zu liegen.

Und hierin dürfte der tiefste Grund dafür liegen, dass die Riemannsche Vermutung seit so langer Zeit allen Beweisversuchen widersteht. Nicht der Mangel an Ideen ist das Problem. Entscheidend ist das Fehlen einer Theorie, welche die vorhandenen Teilergebnisse zu einem zwingenden Gesamtbild vereinigt.

Vielleicht ist dies die nüchternste und zugleich treffendste Beschreibung des gegenwärtigen Standes. Man sieht erstaunlich weit. Aber man sieht noch nicht die Struktur, aus der sich die ganze Gestalt des Problems notwendig ergibt.

Literatur

- [1] E. Bombieri, *Problems of the Millennium. The Riemann Hypothesis*. Clay Mathematics Institute, 2000. Verfügbar unter <https://www.claymath.org/wp-content/uploads/2022/05/riemann.pdf>.
- [2] J. B. Conrey, *The Riemann Hypothesis*. Notices of the American Mathematical Society **50** (2003), no. 3, S. 341–353. Verfügbar unter <https://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/conreyRH.pdf>.
- [3] J. B. Conrey, *Riemann's Hypothesis*. AIM, 2019. Verfügbar unter <https://aimath.org/~kaur/publications/90.pdf>.
- [4] A. Connes, *The Riemann Hypothesis. Past, Present and a Letter Through Time*. 2026. Verfügbar unter <https://arxiv.org/pdf/2602.04022>.
- [5] H. M. Bui, B. Conrey, M. P. Young, *More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line*. Acta Arithmetica **150** (2011), Nr. 1, S. 35–64. Verfügbar unter <https://arxiv.org/pdf/1002.4127>.
- [6] K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler, *More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line*. Research in the Mathematical Sciences **7** (2020), Article 2. Verfügbar unter <https://arxiv.org/pdf/1802.10521>.
- [7] D. Platt, T. Trudgian, *The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$* . Bulletin of the London Mathematical Society **53** (2021), Nr. 3, S. 792–797. Verfügbar unter <https://arxiv.org/pdf/2004.09765>.
- [8] N. Kandhil, A. Languasco, P. Moree, *Pair Correlation of zeros of Dirichlet L-Functions: A possible path towards the conjectures of Chowla, Elliott-Halberstam and Montgomery*. Math. Ann. 394, **43** (2026). Verfügbar unter <https://arxiv.org/pdf/2411.19762>.